

# 基于分数阶微积分的黏弹性材料本构关系建模\*

王滢淳, 刘济科, 蔡盛名, 陈衍茂, 刘奇贤

中山大学航空航天学院, 广东 深圳 518107

**摘要:** 基于分数阶黏弹性力学理论和经典元件, 建立了可精确表征高聚物蠕变及动态力学行为的本构模型。针对材料流变过程中的损伤演化特性, 引入考虑时间效应的损伤变量, 构建含损伤分数阶本构关系, 有效表征材料在应力松弛、加速蠕变等复杂非线性过程中的力学响应。为验证模型可靠性, 基于分数阶 Poynting-Thomson 模型搭建动态力学分析模型, 并通过动态力学实验开展对比验证。结果表明, 模型拟合的迟滞环曲线与试验数据吻合度高, 证明了分数阶导数在高聚物黏弹性动态力学性能描述中的有效性。

**关键词:** 黏弹性材料; 分数阶本构模型; 蠕变损伤; 松弛; 动态力学行为

中图分类号: O34 文献标志码: A 文章编号: 2097-0137(XXXX)XX-0001-11

## Fractional calculus-based modeling of constitutive relations for viscoelastic materials

Wang Yingchun, Liu Jike, Cai Shengming, Chen Yanmao, Liu Qixian

School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Shenzhen 518107, China

**Abstract:** Based on the theory of fractional-order viscoelastic mechanics and classical elements, a constitutive model has been established that can accurately characterize the creep and dynamic mechanical behavior of polymers. In response to the damage evolution characteristics during the material rheological process, a damage variable considering time effects is introduced to construct a damage-involved fractional-order constitutive relationship, effectively representing the mechanical response of the material in complex nonlinear processes such as stress relaxation and accelerated creep. To verify the reliability of the model, a dynamic mechanical analysis model was built based on the fractional-order Poynting-Thomson model, and comparative validation was conducted through dynamic mechanical experiments. The results show that the hysteresis loop curves fitted by the model are highly consistent with the experimental data, demonstrating the effectiveness of fractional derivatives in describing the dynamic mechanical properties of polymers.

**Key words:** viscoelastic materials; fractional constitutive model; creep damage; relaxation; dynamic mechanical behavior

高分子聚合物材料因具备独特的物理特性, 即具备黏性流动的能力, 又能在外力作用下展现出显著的弹性恢复力, 在生物、化学、物理和水文等多个领域得到了广泛应用(Li et al., 2024)。高分子聚合

物隶属于黏弹性材料范畴, 分为线性黏弹性体和非线性黏弹性体两类(Popov et al., 2019.)。在实际情况中, 黏弹性物质更多地展现出非线性黏弹性体的特征, 其力学行为融合了非 Hooke 线弹性和非

\* 收稿日期: 2026-03-03

录用日期: 2026-04-07

网络首发日期: XXXX-XX-XX

基金项目: 深圳市自然科学基金(JCYJ20250604175525033); 国家自然科学基金(12572033)

作者简介: 王滢淳(2001年生), 女; 研究方向: 黏弹性力学; E-mail: wangych295@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 刘奇贤(1989年生), 男; 研究方向: 黏弹性力学; E-mail: liuqx8@mail.sysu.edu.cn

全文阅读



ZR20260053

Newton 黏性的特质,或单独呈现出非 Hooke 线弹性或非 Newton 黏性的表现。

Bagley et al. (1983) 首次在其发表的论文中将分数阶微积分理论应用于黏弹性本构模型的建立。汪洋等 (2017) 开展了不同荷载下的蠕变实验,指出线性黏弹性理论对不锈钢短纤维填充聚丙烯高聚物复合材料体系不适用。Xiang et al. (2021) 利用变阶分数阶导数模型描述了玻璃态高聚物的应力松弛行为。李列列等 (2020) 用分数阶 Abel 黏壶代替 Burgers 模型中的牛顿黏壶,并引入横观各向同性岩石的泊松比矩阵,推导了一个能够描述层状岩石减速度和稳态蠕变阶段的本构方程,但所提出的模型并不能描述加速蠕变阶段特征。Ye et al. (2026) 提出了一种基于分数阶梯度的广义响应灵敏度方法,并将该方法成功应用于高聚物黏弹性材料的本构参数估计上。Wang et al. (2025) 通过短期拉伸试验和长期蠕变试验,研究了退火温度对丙烯酸树脂基材、本体聚合连接试样蠕变性能的影响。分数阶微积分理论为黏弹性材料建模提供了强大的工具。Esmaceli et al. (2020) 对丁苯橡胶进行了高频 DMA 试验,测量了其在 100~5 000 Hz 频率范围内的动态模量。Göbel et al. (2025) 利用动态力学分析技术,探究了聚合物改性硬化水泥浆体的黏弹性特征。Pierro et al. (2021) 使用广义 Maxwell 模型描述了材料的频率依赖性复模量,提出了一种基于梁振动响应的简单实验方法。Tayyebati et al. (2025) 采用动态力学分析方法,测量了环氧树脂材料的原始和疲劳试件的动态力学性能。但是,在描述加速蠕变等非线性破坏阶段时,模型的能力尚有不足;其次,复杂模型往往伴随参数识别困难的问题。因此,本文提出了一个参数精简的非线性蠕变损伤模型,该模型通过融合分数阶导数元件与线弹性元件,引入损伤变量,有效表征了材料的加速蠕变特性。进一步地,本研究应用分数阶 Poynting-Thomson 模型对高聚物的动态响应特性进行了描述,并通过正弦载荷实验验证了该模型的有效性。

## 1 分数阶元件及组合模型

分数阶微积分是经典微积分在非整数阶上的扩展,它已经成为模拟复杂系统异常行为的有力工具。其中,Riemann-Liouville 定义 (Vishnukumar et al., 2024) 和 Caputo 定义 (Rahman et al., 2025) 最为常用。因 Riemann-Liouville 模型可以简化分数阶导数的计算 (王玉娇, 2014),且在黏弹性本构模型中

Riemann-Liouville 型分数阶微积分应用较普遍,本文选择 Riemann-Liouville 型分数阶微积分定义作为理论基础。

对于定义在  $[0, \infty)$  的  $\alpha$  阶可微函数  $f(t)$ , Riemann-Liouville 型分数阶积分定义为

$${}^{\text{RL}}I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^\alpha f(\tau) d\tau,$$

式中  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$  表示 Gamma 函数。其  $\alpha$  阶微分定义为

$$\begin{aligned} {}^{\text{RL}}\mathcal{D}_t^\alpha f(t) &= \frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \left[ \mathcal{D}^{-(n-\alpha)} f(t) \right] \\ &= \frac{d^n}{dt^n} \left[ \int_0^t f(t-\tau) \frac{\tau^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} d\tau \right]. \end{aligned}$$

$f(t)$  在  $t=0$  附近可积且  $\alpha \in [0, 1]$  时,  $f(t)$  的 Laplace 变换及其逆变换表达式为

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t), s] = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) ds,$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s), s] = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{st} F(s) ds.$$

用以描述黏弹性材料力学特性的分数阶黏弹性基本元件——经典 Koeller 弹壶元件 (Ding et al., 2022) 和 Abel 黏壶元件 (Meng et al., 2023), 如图 1 所示。

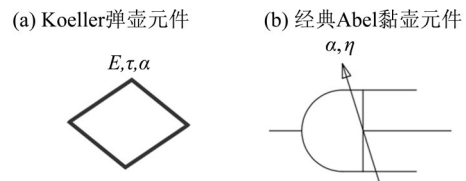


图 1 分数阶黏弹性基本元件

Fig. 1 Fractional viscoelastic basic element

经典 Koeller 弹壶元件和 Abel 黏壶元件分别为

$$\sigma(t) = E^{1-\alpha} \eta^\alpha \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1; \quad (1)$$

$$\sigma(t) = \eta \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (2)$$

式中  $\eta$  为黏度;  $E$  为弹性模量。引入变量 (蠕变过程中的延迟时间或在应力松弛过程中的应力松弛时间)  $\tau = \eta/E$ , 可得经典 Koeller 弹壶元件和 Abel 黏壶元件分别为

$$\sigma(t) = E\tau^\alpha \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha}, \quad \sigma(t) = E\tau \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha}.$$

将上述分数阶元件与 Hooke 元件进行串、并联

组合,能够构建出多样化的组合模型(如图2所示),并精确描述和预测不同类型的黏弹性力学行为。

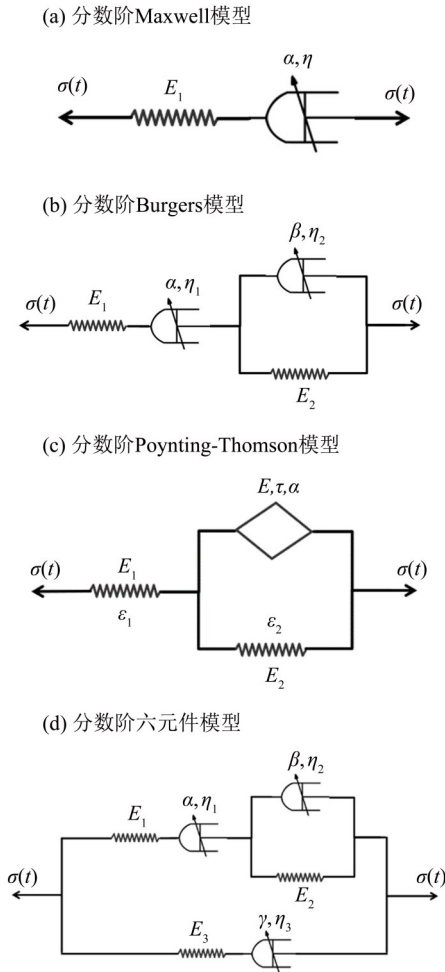


图2 分数阶组合模型

Fig. 2 Fractional combined model

## 2 准静态本构关系建模与实验验证

### 2.1 静态本构关系建模

Hooke 元件的应变  $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_0}$ , 在蠕变加载条件下,对式(2)积分可得 Abel 黏壶的应变为

$$\varepsilon_{ve} = \frac{\sigma}{\eta} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (3)$$

取  $\sigma = 20 \text{ MPa}$ ,  $\eta = 3 \text{ GPa} \cdot \text{h}$ , Abel 黏壶的蠕变曲线如图3所示。由图可知,Abel 黏壶可以反映蠕变应变的非线性过程;但在  $0 < \alpha < 1$  时,Abel 黏壶只能描述蠕变的第一和第二阶段,无法描述加速蠕变阶段。

由式(3)可得在恒定应力下的分数阶 Maxwell 模型的本构关系为

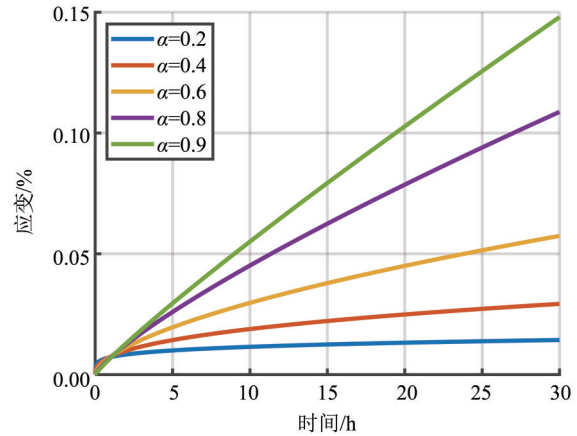


图3 Abel 黏壶蠕变曲线

Fig. 3 Abel Dashpot creep curve

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta} \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}.$$

Abel 黏壶元件和 Hooke 元件并联的 Kelvin 模型本构关系为

$$\sigma(t) = E_2 \varepsilon(t) + \eta \frac{d^\beta \varepsilon(t)}{dt^\beta}. \quad (4)$$

对式(4)进行整理,并取 Laplace 变换得:

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{E_2 + \eta s^\beta} \cdot \frac{\sigma}{s}. \quad (5)$$

对式(5)进行 Laplace 逆变换得:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_2} - \frac{\sigma}{E_2} E_\beta \left( -\frac{E_2}{\eta_2} t^\beta \right),$$

其中  $E_\beta \left( -\frac{E_2}{\eta_2} t^\beta \right)$  为 Mittag-Leffler 函数表达形式。于是,恒定应力下分数阶 Burgers 模型的本构方程为

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_1} + \frac{\sigma}{\eta_1} \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)} + \frac{\sigma}{E_2} - \frac{\sigma}{E_2} E_\beta \left( -\frac{E_2}{\eta_2} t^\beta \right).$$

### 2.2 蠕变、松弛实验

实验采用由 INSTRON 公司的伺服液压疲劳试验系统 (SFTS 8872)、WAVEMATRIX2 控制系统 (WM 2) 及 3520 系列液压动力装置 (HPU) 组成的全套测试设备。

选取乙丙橡胶 (EPR) 材料与聚甲基丙烯酸甲酯 (PMMA) 板材试样,开展 24 h 蠕变实验和松弛实验。每类黏弹性流变试验重复 3 次及以上,选取应变/应力响应最平滑、稳定,且重复性验证中与其他有效曲线趋势一致性最高的作为最合理的实验结果,进行数据拟合。

从图4~5可以看出,分数阶 Maxwell 模型、分数阶 Burgers 模型与分数阶六元件模型在高聚物初始和稳态蠕变阶段描述能力良好,  $R^2 \geq 0.98$ ; 在高聚物

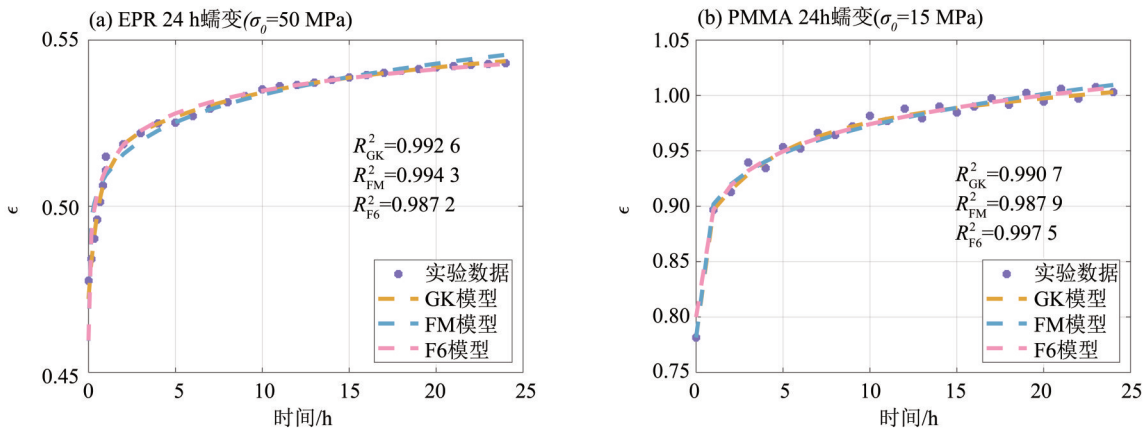


图4 分数阶 (Maxwell) 和广义整数阶 (Kelvin) 模型的蠕变拟合

Fig. 4 Creep results by Maxwell and Burgers models

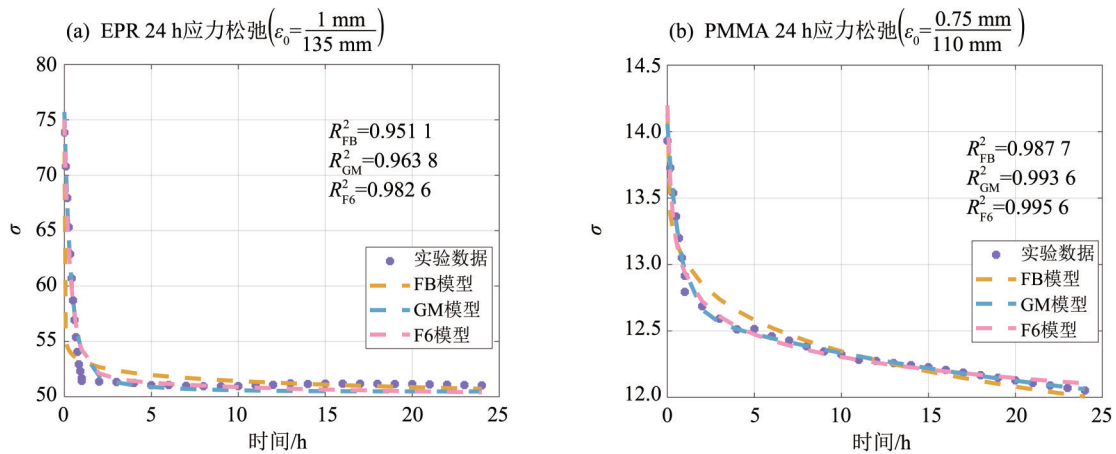


图5 分数阶 (Burgers) 和广义整数阶 (Maxwell) 模型的应力松弛拟合

Fig. 5 Stress relaxation results by Maxwell and Burgers models

应力松弛阶段描述能力良好,  $R^2 \geq 0.95$ 。从表 1~2 中可以看出, 分数阶模型具有参数较少的显著优势, 这突出了分数黏弹性模型在表征黏弹性材料本构关系方面增强的普适性。同时, 如表 3~6 所示, 广义整数阶模型包含十几个参数, 这大大增加了拟合过程的复杂性, 并会由于参数的激增而使得模型的物理解释变得越来越模糊。

需要说明的是, 本文中蠕变与松弛行为的拟合参数存在差异, 原因可能是二者分别为材料在恒定应力和恒定应变两种不同力学加载条件下的黏弹性响应。但是, 本文中两类行为的拟合参数均为实验数据非线性最小二乘拟合得到的最优解, 且所有拟合结果的拟合优度均满足应用要求。

表1 分数阶模型的最优拟合蠕变参数

Table 1 Best-fitting creep-parameters of fractional model

| 模型            | $E_1/\text{MPa}$ | $E_2/\text{MPa}$ | $E_3/\text{MPa}$ | $\eta_1/(\text{MPa}\cdot\text{h})$ | $\eta_2/(\text{MPa}\cdot\text{h})$ | $\eta_3/(\text{MPa}\cdot\text{h})$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---------------|------------------|------------------|------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|----------|---------|----------|
| Maxwell(EPR)  | 10 881           | -                | -                | 108 280                            | -                                  | -                                  | 0.171 7  | -       | -        |
| Maxwell(PMMA) | 1 919. 5         | -                | -                | 13 573                             | -                                  | -                                  | 0.201 1  | -       | -        |
| 六元件(EPR)      | 11 497           | 7 900. 7         | 11 524           | 12 289                             | 9 498. 6                           | 10 439                             | 0.012 1  | 0.263 4 | 0.01     |
| 六元件(PMMA)     | 1 964. 2         | 4 549. 3         | 1 214            | 2 289. 4                           | 2 101. 1                           | 2 260. 7                           | 0.065 5  | 0.126 4 | 0.102 6  |

高聚物在加速蠕变阶段的应变率迅速增加, 裂纹快速发展, 表现出明显的非线性损伤蠕变特征。

因此, 引入损伤变量, 建立分数阶非线性损伤黏壶, 来描述高聚物的加速蠕变过程。

表2 分数阶模型的最优拟合应力松弛参数

Table 2 Best-fitting stress relaxation-parameters of fractional model

| 模型            | $E_1/\text{MPa}$ | $E_2/\text{MPa}$ | $E_3/\text{MPa}$ | $\eta_1/(\text{MPa}\cdot\text{h})$ | $\eta_2/(\text{MPa}\cdot\text{h})$ | $\eta_3/(\text{MPa}\cdot\text{h})$ | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
|---------------|------------------|------------------|------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|----------|---------|----------|
| Maxwell(EPR)  | 102.53           | 8 287.6          | -                | 253.719                            | 9 811.14                           | -                                  | 0.049 2  | 0.012 4 | -        |
| Maxwell(PMMA) | 25.053 9         | 118.9            | -                | 275.488                            | 50 000                             | -                                  | 0.234 5  | 0.011 2 | -        |
| 六元件(EPR)      | 11 749           | 8 795.5          | 8 010.1          | 13 110                             | 7 046.5                            | 6 015.2                            | 0.049 6  | 0.96    | 0.01     |
| 六元件(PMMA)     | 1 857.6          | 3 371.4          | 1 622.8          | 2 301.2                            | 1 614.2                            | 3 233.5                            | 0.056 1  | 0.493 3 | 0.031 1  |

表3 广义 Kelvin 模型(GK)的最优拟合蠕变参数( $E$ )

Table 3 Best-fitting creep-parameters of Generalized Kelvin( $E$ )

| 材料   | $E_0/\text{MPa}$ | $E_1/\text{GPa}$ | $E_2/\text{GPa}$ | $E_3/\text{GPa}$ | $E_4/\text{GPa}$ | $E_5/\text{MPa}$ | $E_6/\text{GPa}$ | $E_7/\text{GPa}$ |
|------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| EPR  | 10 881           | 450.85           | 669.95           | 216.04           | 9 611.3          | 9 611.3          | 445.68           | 435.25           |
| PMMA | 1 919.5          | 35.325           | 49.283           | 108.57           | 43.103           | 48.176           | 95.934           | 49.099           |

表4 广义 Kelvin 模型(GK)的最优拟合蠕变参数( $\eta$ )

Table 4 Best-fitting creep-parameters of Generalized Kelvin

GPa·h

| 材料   | $\eta_0$ | $\eta_1$ | $\eta_2$ | $\eta_3$ | $\eta_4$ | $\eta_5$ | $\eta_6$ | $\eta_7$ |
|------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| EPR  | 16 769   | 280.68   | 417.72   | 1 665.4  | 1.618 5  | 4.938 6  | 277.46   | 272.18   |
| PMMA | 1 434.1  | 119.46   | 1.683 6  | 368.74   | 381.93   | 2.266 1  | 321.59   | 0.551 5  |

表5 广义 Maxwell 模型(GM)的最优拟合应力松弛参数( $E$ )

Table 5 Best-fitting stress relaxation-parameters of Generalized Maxwell( $E$ )

| 材料   | $E_0/\text{MPa}$ | $E_1/\text{GPa}$ | $E_2/\text{GPa}$ | $E_3/\text{GPa}$ | $E_4/\text{GPa}$ | $E_5/\text{MPa}$ | $E_6/\text{GPa}$ | $E_7/\text{GPa}$ |
|------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| EPR  | 74.024 7         | 521 259          | 12.355 8         | 12.355 8         | 3.920 9          | 6.348 3          | 1.021 5          | 1.021 5          |
| PMMA | 15.987 6         | 0.655 7          | 1.413 7          | 1.236 6          | 0.397 8          | 0.547 4          | 0.246 8          | 0.787 4          |

表6 广义 Maxwell 模型(GM)的最优拟合应力松弛参数( $\eta$ )

Table 6 Best-fitting stress relaxation-parameters of Generalized Maxwell( $\eta$ )

MPa·h

| 材料   | $\eta_1$             | $\eta_2$ | $\eta_3$  | $\eta_4$ | $\eta_5$ | $\eta_6$ | $\eta_7$ |
|------|----------------------|----------|-----------|----------|----------|----------|----------|
| EPR  | $512.39 \times 10^6$ | 3.960 2  | 3.960 2   | 3.960 2  | 3.960 2  | 4.019 5  | 4.019 5  |
| PMMA | 0.392 2              | 0.978 8  | 178.875 7 | 0.274 2  | 79.253 3 | 0.200 1  | 13.386   |

损伤变量  $D(t) = 1 - e^{-\omega t}$  是描述材料损伤程度的标量,  $0 \leq D(t) \leq 1$ 。其中,  $\omega$  为损伤演化速率, 它表征了损伤累积的快慢程度。损伤变量随  $\omega$  的变化曲线如图 6 所示。  $t = 0$  时,  $D(0) = 0$ , 材料处于无损伤状态; 随着  $t$  的增加,  $D(t)$  逐渐趋近于 1, 材料内部分子链断裂、结构劣化等损伤不断累积, 最终趋近于完全损伤状态。

考虑损伤的黏塑性元件, 其应力应变关系为

$$\sigma(t) = \sigma_s + \eta(1 - D) \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha} = \sigma_s + \eta_3 e^{-\omega t} \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha}. \quad (6)$$

对式(6)两边积分, 并使用双参数 Mittag-Leffler 函数  $I^\alpha[e^{-\omega t}] = t^\alpha E_{1, \alpha+1}(\omega t)$  整理得:

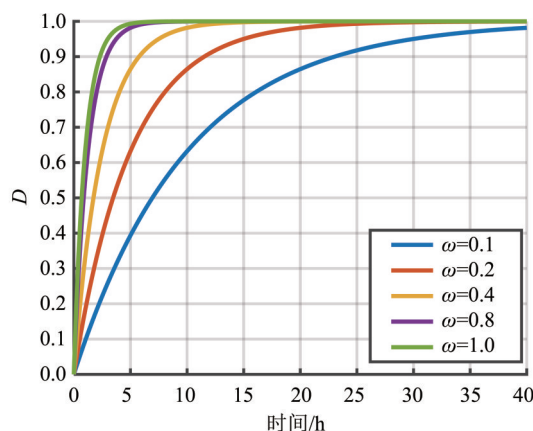


图6 损伤变量  $D$  随  $\omega$  的变化

Fig. 6  $D$  curve varying with  $\omega$

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta} t^\alpha E_{1,1+\alpha}(\omega t), \sigma \geq \sigma_s.$$

将考虑损伤的黏塑性元件和分数阶 Maxwell 模型串联,得到含损伤的四元件模型,如图 7 所示。

本文模型的完整蠕变过程中产生的总应变为  $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_{ve} + \varepsilon_{vp}$ ,因此蠕变损伤的本构方程为

$$\varepsilon = \begin{cases} \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta_1} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, & \sigma < \sigma_s; \\ \frac{\sigma}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta_1} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\sigma - \sigma_s}{\eta_2} t^\beta E_{1,1+\beta}(\omega t), & \sigma \geq \sigma_s. \end{cases}$$

为验证模型的有效性,对 PVC 试样进行 42 h 的蠕变实验,重复 3 次以上,并采用最合理的实验结果进行数据拟合,结果如图 8 和表 7 所示。

从图 8 和表 7 可以看出,含损伤的四元件模型能够更好的描述加速蠕变过程以及蠕变全过程,所建立的模型能较为准确地描述高聚物的蠕变特性。

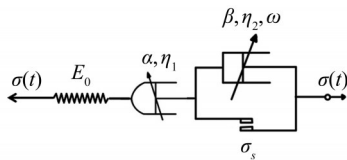


图 7 含损伤四元件模型

Fig. 7 Damage-containing four-element model

在 10、15、20 MPa 的恒应力条件下,对 PVC 试样进行 12 h 的蠕变实验以及 8 h 的蠕变回复实验。对蠕变回复阶段的数据进行拟合,结果如图 9 所示。同时,在不同恒应力的作用下,每组 PVC 试样均发生了塑性蠕变,导致不可逆的塑性变形。本文读取 PVC 试件遗留的塑性形变量,采用含损伤的四元件模型对蠕变回复阶段进行拟合,结果如表 8 和图 10 所示。

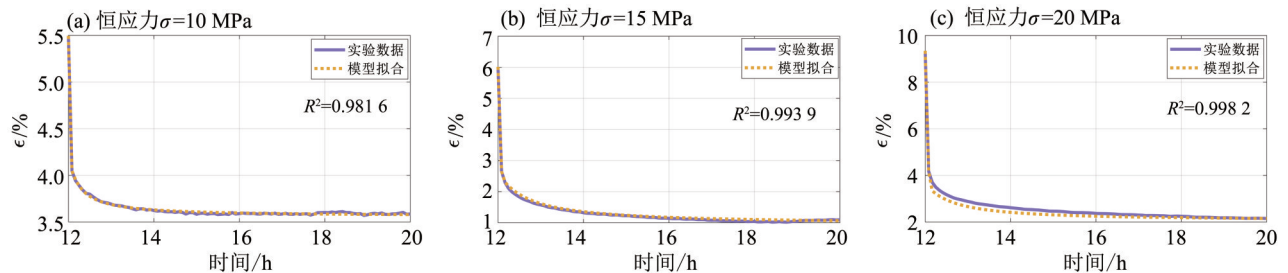


图 10 含损伤四元件模型的蠕变回复最优拟合

Fig. 10 Best-fitting results by damage-containing four-element model

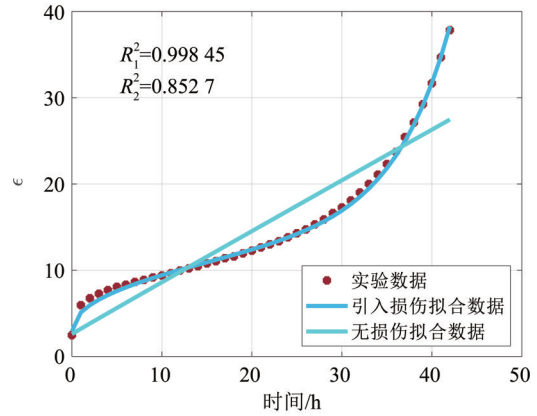


图 8 含损伤四元件模型的拟合结果

Fig. 8 Creep results by damage-containing four-element model

表 7 含损伤四元件模型的最优拟合参数

Table 7 Best-fitting creep-parameters of damage-containing four-element model

| $E_0/\text{MPa}$ | $\eta_1$<br>/(MPa·h) | $\alpha$ | $\eta_2$<br>/(GPa·h) | $\beta$ | $\omega$ | $\sigma_s/\text{MPa}$ |
|------------------|----------------------|----------|----------------------|---------|----------|-----------------------|
| 832              | 1 036.3              | 0.4664   | 164.52               | 0.635   | 0.16     | 6.8078                |

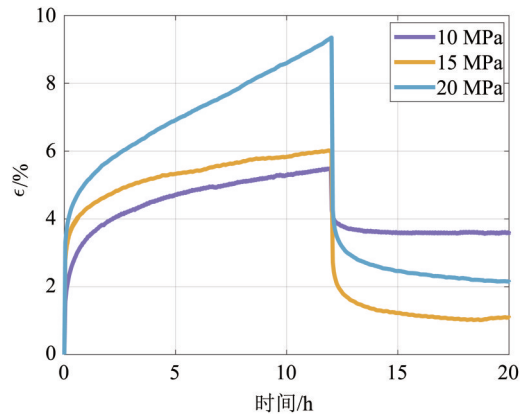


图 9 PVC 试样的蠕变回复

Fig. 9 Creep recovery of PVC specimen

### 3 动态本构关系建模及实验验证

#### 3.1 动态本构关系建模

由于经典 Koeller 弹壶元件通过提供额外的弹

表 8 含损伤的四元件模型的最优拟合参数  
Table 8 Best-fitting parameters of damage-containing four-element model

| 恒应力/MPa | $E_0$ /MPa | $\alpha$ | $\eta_1$ /(MPa·h) |
|---------|------------|----------|-------------------|
| 10      | 690.9      | 0.190 2  | 2 725             |
| 15      | 446        | 0.253 4  | 1 426             |
| 20      | 386.3      | 0.277 6  | 1 545             |

性系数,使得拟合过程能够同时且直观地展现黏弹性材料的弹性与黏性特征,因此本文选择用含有分数阶微分算子的弹壶元件替换经典线性固体模型中的黏壶。并以分数阶导数 Poynting-Thomson 模型为例(如图 11 所示),进行动态分析。

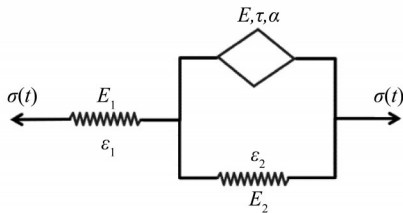


图 11 分数阶导数 Poynting-Thomson 模型  
Fig. 11 Fractional Poynting-Thomson model

分数阶导数 Poynting-Thomson 模型的本构方程为

$$\sigma = \frac{E_1(E_2 + E\tau^\alpha \mathcal{D}^\alpha)}{E_1 + E_2 + E\tau^\alpha \mathcal{D}^\alpha} \varepsilon. \quad (7)$$

对式(7)进行 Fourier 变换,得:

$$F[\sigma(t)] = \sigma(\zeta) = \frac{E_1(E_2 + E\tau^\alpha (i\zeta)^\alpha)}{E_1 + E_2 + E\tau^\alpha (i\zeta)^\alpha} \varepsilon(\zeta).$$

将上式代入复模量定义  $\mathcal{G}^*(i\zeta) = \sigma(f)/\varepsilon(f)$ , 可得:

$$\mathcal{G}^*(i\zeta) = \frac{E_1(E_2 + E\tau^\alpha (i\zeta)^\alpha)}{E_1 + E_2 + E\tau^\alpha (i\zeta)^\alpha}.$$

因  $i^\alpha = \cos(\frac{\alpha\pi}{2}) + i \sin(\frac{\alpha\pi}{2})$ , 复模量可以分解为实部和虚部两部分,即  $\mathcal{G}^*(i\zeta) = \mathcal{G}_1(\zeta) + i\mathcal{G}_2(\zeta)$ 。其中  $\mathcal{G}_1(\zeta)$  为存储模量,  $\mathcal{G}_2(\zeta)$  为损耗模量, 损耗因子  $\tan \delta = \mathcal{G}_2(\zeta)/\mathcal{G}_1(\zeta)$ 。

且, 存储模量和损耗模量分别为

$$\mathcal{G}_1(\zeta) = \frac{E_1 \left[ E_1 E_2 + E_2^2 + (2E_2 + E_1) E \tau^\alpha \zeta^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + E^2 \tau^{2\alpha} \zeta^{2\alpha} \right]}{E_1^2 + 2E_1 E_2 + 2E(E_2 + E_1) \tau^\alpha \zeta^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + E_2^2 + E^2 \tau^{2\alpha} \zeta^{2\alpha}},$$

$$\mathcal{G}_2(\zeta) = \frac{E_1^2 E \tau^\alpha \zeta^\alpha \sin \frac{\alpha\pi}{2}}{E_1^2 + 2E_1 E_2 + 2E(E_2 + E_1) \tau^\alpha \zeta^\alpha \cos \frac{\alpha\pi}{2} + E_2^2 + E^2 \tau^{2\alpha} \zeta^{2\alpha}}.$$

### 3.2 动态实验验证

黏弹性材料的动态力学性能测试采用正弦应变  $\varepsilon_{\sin 1} = (0.2 \pm 0.2)$  mm 对 PE 板材试样进行循环拉伸实验。并使用本文提出的模型以及 5 元件广义麦克斯韦模型进行数据拟合。

本文采用梯度下降算法,对分数阶黏弹性本构模型进行参数拟合。首先,对循环拉伸实验获得的应力-应变数据进行预处理,并通过快速傅里叶变换(FFT)提取基频分量。随后,利用 logit 变换或对数变换将有约束的实际参数转换为无约束参数以初始化优化过程。采用梯度下降法进行迭代优化,其中梯度由有限差分法近似,步长通过 Armijo 线搜索自适应确定(Sun et al., 2006)。当梯度范数小于设定容差时,迭代终止。最终,将优化参数反变换为物理值,并通过拟合曲线与实验曲线的对比评估拟合效果,结果如图 12 和表 9-11 所示。

从图 12 可以看出,5 元件 GM 模型及 FPT 模型均能有效表征 PE 试样的应力-应变滞回过程。但分数阶导数 Poynting-Thomson 模型仅需 5 个参数,就可达到与 11 个参数的广义 Maxwell 模型相当的拟合精度。

随着加载频率的增加,PE 试样的最大正弦应力表现出明显的频率依赖性,从 0.973 MPa (0.01 Hz) 递增至 1.738 MPa (20 Hz),增幅达 78.6%。这一现象揭示了黏弹性材料的频率敏感特性。这本质上反映了高分子链段运动的时间依赖性,即材料无法瞬时达到平衡。

加载频率的提升导致 PE 试样的滞回环形态发生了显著演变,在低频状态下(0.01~0.1 Hz),分子链有足够的时间进行松弛、解缠和重新排列。这使得黏性(能量耗散)效应得到充分体现,此时滞回环面积变大,每个循环周期内耗散的能量较多,材料的

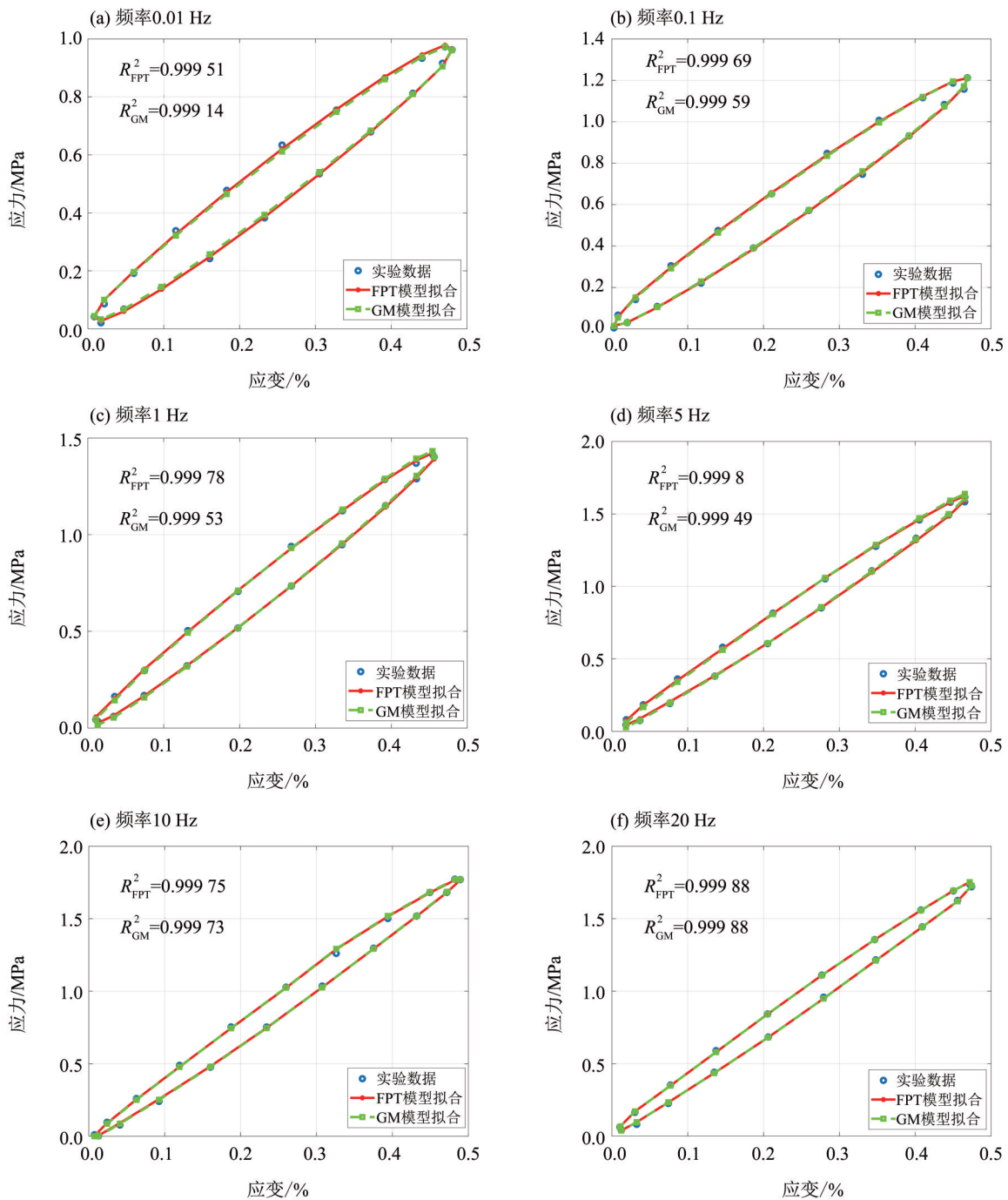


图12 GM及FPT模型(PE试样、采用正弦应变)的最优拟合结果

Fig. 12 Optimal fitting results of GM model and FPT model for PE specimens under sinusoidal strain

表9 不同频率下的滞回环面( $\varepsilon_{\sin 1} = (0.2 \pm 0.2) \text{ mm}$ )Table 9 Hysteresis loop area under  $\varepsilon_{\sin 1} = (0.2 \pm 0.2) \text{ mm}$  at different frequencies

| 频率(Hz)               | 0.01  | 0.1   | 1     | 5     | 10    | 20    |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 面积( $\text{J/m}^3$ ) | 0.069 | 0.077 | 0.067 | 0.065 | 0.061 | 0.060 |

阻尼性能较好。在中频状态下(1~5 Hz),随着频率升高,分子链运动开始跟不上应变的变化,滞回环面积逐渐减小,耗散的能量相对于低频时减少,滞

回环的形状更倾向于扁状椭圆形。在高频状态下(10~20 Hz),分子链段几乎来不及进行大规模的松弛运动,主要表现为链段的键长、键角变化,因此材料的动态模量显著增大。黏弹性材料的动态响应模式从低频区的黏性主导响应逐渐转变为高频区的弹性主导响应。

另外,分数阶 Poynting-Thomson (FPT) 模型的最优拟合参数呈现出显著的载荷频率相关性:当激

励频率由 0.01 升至 20 Hz 时,  $\alpha$  由 0.971 8 降至 0.625 4,  $\tau$  则在中高频区间呈逐步增大趋势;  $E$ 、 $\alpha$  及  $\tau$  随频率的演化, 可清晰反映出该黏弹性材料具有显著的频率依赖特性。

采用正弦应变  $\varepsilon_{\sin 2} = (0.5 \pm 0.5)$  mm 对 PE 板材试样进行循环拉伸实验, 使用粒子群优化算法对两组实验的存储模量进行拟合, 结果如图 13 所示。图 13 中, 随着频率  $f$  从 0.01 Hz 增加到 20 Hz, 存储模量有所提高, 且随动态应变振幅的升高而降低。在低应变振幅下, 分子链段仅发生小范围的弹性形变,

表 10 FPT 模型对 PE 试样的最优拟合参数( $\varepsilon_{\sin 1} = (0.2 \pm 0.2)$  mm)

Table 10 Best-fitting parameters of FPT model for PE specimens under  $\varepsilon_{\sin 1} = (0.2 \pm 0.2)$  mm

| 频率/Hz | $\alpha$ | $\tau$  | $E_1$ /MPa | $E_2$ /MPa | $E$ /MPa |
|-------|----------|---------|------------|------------|----------|
| 0.01  | 0.971 8  | 0.061 2 | 8.273      | 2.441      | 1423.44  |
| 0.1   | 0.963 4  | 0.032 6 | 8.273      | 3.016      | 384.49   |
| 1     | 0.932 4  | 0.028 1 | 8.273      | 3.543 9    | 68.63    |
| 5     | 0.846 6  | 0.038 8 | 8.273      | 3.913 8    | 14.89    |
| 10    | 0.750 1  | 0.054 7 | 8.273      | 4.140 7    | 8.083    |
| 20    | 0.625 4  | 0.077 1 | 8.273      | 4.173 2    | 4.409    |

表 11 5 元件广义 Maxwell(GM)模型对 PE 试样采用正弦应变的最优拟合参数

Table 11 Best-fitting parameters of 5-element Generalized Maxwell (GM) Model for PE specimens under sinusoidal strain

| 频率/Hz | $E_0$ /MPa | $E_1$ /MPa | $E_2$ /MPa | $E_3$ /MPa | $E_4$ /MPa | $E_5$ /MPa | $\eta_0$ /(MPa·h) | $\eta_1$ /(MPa·h) | $\eta_2$ /(MPa·h) | $\eta_3$ /(MPa·h) | $\eta_4$ /(MPa·h) |
|-------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 0.01  | 1.960 5    | 257.81     | 257.81     | 257.81     | 257.81     | 499 859    | 0.668 2           | 0.005 2           | 0.004 2           | 0.004 2           | 0.004 2           |
| 0.1   | 0.136 5    | 0.583 3    | 0.583 3    | 0.583 3    | 0.583 3    | 499 959    | 59.43             | 8.929 8           | 7.930 4           | 8.930 3           | 7.931 5           |
| 1     | 0.160 2    | 0.712 3    | 0.752 3    | 0.722 2    | 0.692 4    | 499 999    | 30.48             | 1.025 4           | 1.025 4           | 1.025 6           | 1.025 1           |
| 5     | 0.192 7    | 0.797 6    | 0.798 6    | 0.799 1    | 0.798 8    | 499 999    | 21.08             | 0.251 1           | 0.280 4           | 0.250 2           | 0.250 3           |
| 10    | 0.181 5    | 0.849 8    | 0.846 2    | 0.849 2    | 0.846 3    | 499 862    | 18.29             | 0.145 2           | 0.146 5           | 0.135 4           | 0.181 5           |
| 20    | 0.167 5    | 0.835 8    | 0.839 7    | 0.839 6    | 0.830 4    | 499 882    | 15.74             | 0.074 3           | 0.073 7           | 0.073 6           | 0.075 3           |

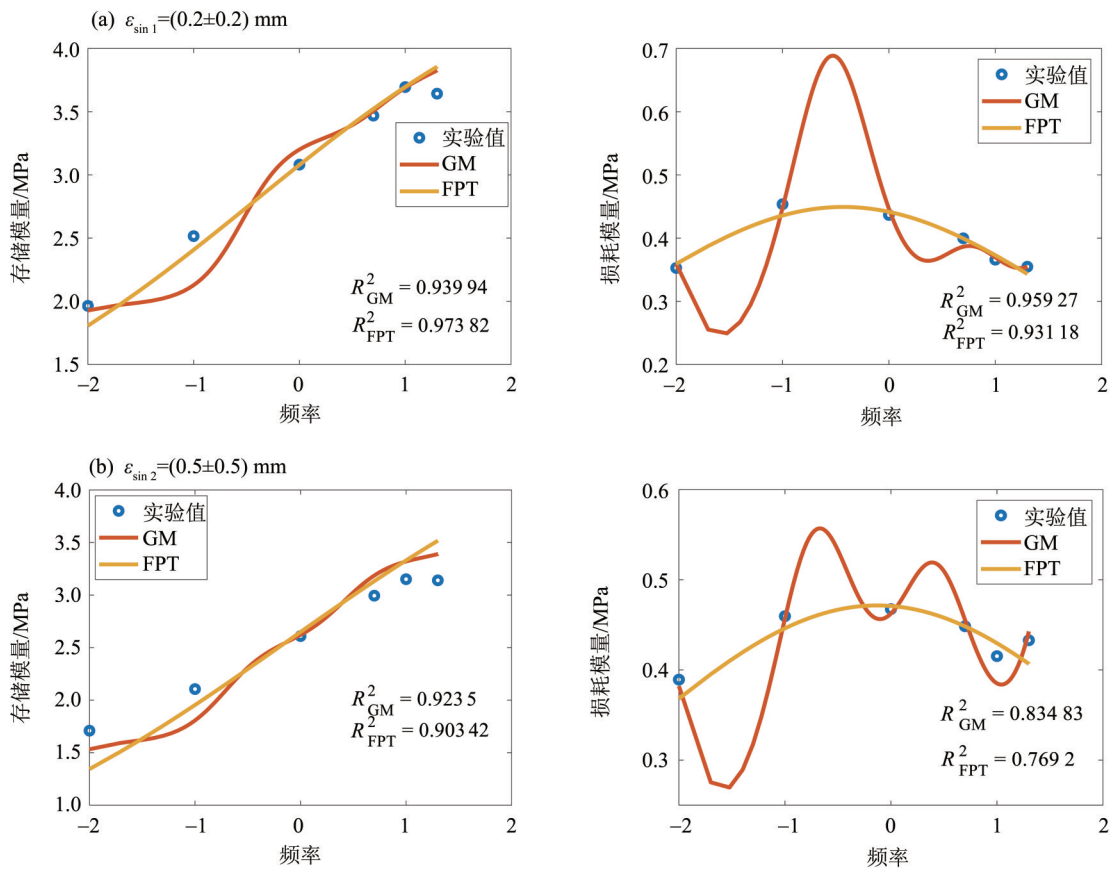


图 13 存储模量、损耗模量随频率的变化

Fig. 13 The results of storage modulus and loss modulus as a function of frequency

分子间作用力和链缠结构相对稳定,存储模量维持在较高水平;当应变振幅增大到一定程度时,分子链段的运动范围扩大,部分链缠结被破坏或发生滑移,分子间作用力难以完全抵抗形变,导致材料的弹性响应能力下降,表现为存储模量随应变振幅升高而降低。损耗模量频率为 20 Hz 时出现了回升,这说明材料内部可能有多种耗能机制在不同频率下切换。因此,设计承受大振幅振动的 PE 部件时,必须考虑其模量会随形变增大而软化,不能仅仅使用小应变时测得的模量值。

采用正弦应力  $\sigma_{\sin}$  对 PE 试样进行不同频率下的循环拉伸实验,使用本文模型和广义开尔文模型进行拟合,结果图 14 和表 12~14 所示。在同一正弦应力  $\sigma_{\sin}$  的条件下,PE 试样的最大正弦应变  $\varepsilon_{\sin, \max}$  随频率提升呈现显著下降的情况。具体来说,  $\varepsilon_{\sin, \max}$  由 1.076 7% (0.01 Hz) 单调递减至 0.569 9% (5 Hz), 这一现象再次揭示了黏弹性材料的频率敏感特性。

表 12 不同频率下的滞回环面积 ( $\varepsilon_{\sin 2} = (0.5 \pm 0.5) \text{ mm}$ )  
Table 12 Hysteresis loop area under  $\varepsilon_{\sin 2} = (0.5 \pm 0.5) \text{ mm}$  at different frequencies

| 频率/Hz                   | 0.01  | 0.1   | 5     |
|-------------------------|-------|-------|-------|
| 面积/(J·m <sup>-3</sup> ) | 0.358 | 0.276 | 0.107 |

表 13 FPT 模型对 PE 试样的最优拟合参 ( $\varepsilon_{\sin 2} = (0.5 \pm 0.5) \text{ mm}$ )  
Table 13 Best-fitting parameters of FPT model for PE specimens under  $\varepsilon_{\sin 2} = (0.5 \pm 0.5) \text{ mm}$

| 频率/Hz | $\alpha$ | $\tau/h$ | $E_1/\text{MPa}$ | $E_2/\text{MPa}$ | $E_3/\text{MPa}$ |
|-------|----------|----------|------------------|------------------|------------------|
| 0.01  | 0.971 1  | 0.066 9  | 8.273            | 2.413            | 1 463.47         |
| 0.1   | 0.963 3  | 0.030 5  | 8.273            | 2.453 7          | 385.75           |
| 5     | 0.842 5  | 0.039 7  | 8.273            | 3.915 9          | 14.96            |

PE 分子链段的运动需要时间跟上外力变化。高频时,链段来不及响应,材料表现为“刚性”增强。这与滞回环的变化趋势一致,也是高聚物从橡胶态向玻璃态过渡的典型特征之一。

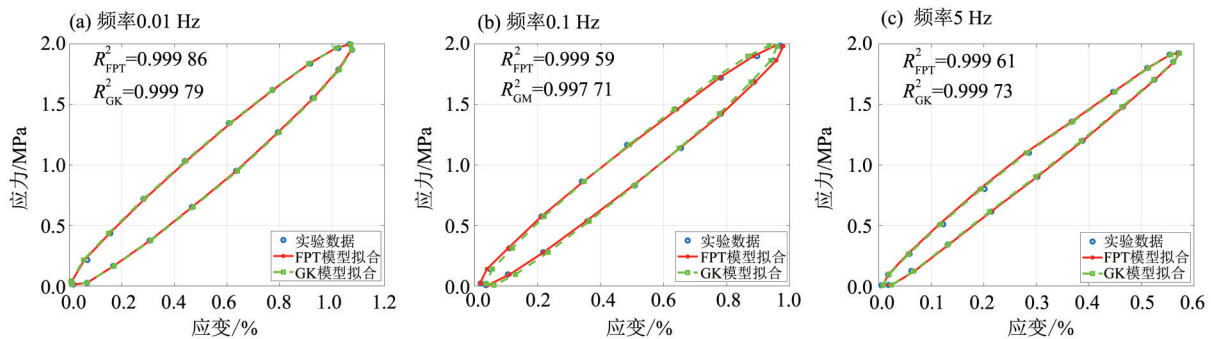


图 14 GK 及 FPT 模型 (PE 试样、采用正弦应力) 的最优拟合

Fig. 14 Best-fitting parameters of GK and FPT model for PE specimens under sinusoidal stress

表 14 GK 模型对 PE 试样采用正弦应力的最优拟合参数

Table 14 GK Model for PE specimens under sinusoidal strain

| 频率/Hz | $E_0/\text{MPa}$ | $E_1/\text{MPa}$ | $E_2/\text{MPa}$ | $E_3/\text{MPa}$ | $E_4/\text{MPa}$ | $E_5/\text{MPa}$ | $\eta_0/(\text{MPa}\cdot\text{h})$ | $\eta_1/(\text{MPa}\cdot\text{h})$ | $\eta_2/(\text{MPa}\cdot\text{h})$ | $\eta_3/(\text{MPa}\cdot\text{h})$ | $\eta_4/(\text{MPa}\cdot\text{h})$ | $\eta_5/(\text{MPa}\cdot\text{h})$ |
|-------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| 0.01  | 10.76            | 11.46            | 11.20            | 12.94            | 11.20            | 11.46            | 848.43                             | 2.52                               | 2.57                               | 4.27                               | 3.58                               | 3.21                               |
| 0.1   | 2.19             | 0.012 4          | 0.012 4          | 0.012 3          | 0.012 4          | 0.012 3          | 10 273                             | 557.17                             | 557.17                             | 550.33                             | 557.17                             | 550.33                             |
| 5     | 3.44             | 0.002 3          | 0.002 3          | 0.002 3          | 0.002 3          | 0.002 3          | 10 313                             | 26.81                              | 26.81                              | 26.81                              | 26.81                              | 26.81                              |

## 4 结 论

1) 基于分数阶微积分理论,借鉴经典元件模型的组合思路,将 Abel 黏壶元件与 Hooke 元件进行串并联,使其能够同时反映高聚物的初始和稳态蠕变阶段。引入反映时间影响的损伤因子,形成了能描述加速蠕变阶段的四元件非线性蠕变损伤模型。

2) 动态的黏弹性研究表明,广义整数阶模型和分数阶模型均能有效描述材料的流变特性。

3) 参数对比分析显示,分数阶模型的简约性优势明显:相较于广义整数阶模型,分数阶模型在保证相同拟合精度的前提下大幅压缩了参数规模。静态工况下由 16 个参数减至 3~9 个,动态工况下由 11 个参数减至 5 个。

## 参考文献:

- 李列列, 管俊峰, 肖明砾, 等, 2020. 一种横观各向同性岩体蠕变模型[J]. 岩土力学, 41(9): 2922-2930+2942.
- 汪洋, 陈建康, 李克武, 等, 2017. 蠕变条件下刚性夹杂填充高聚物复合材料的延迟时间-蠕变荷载幂率关系研究[J]. 固体力学学报, 38(4): 348-358.
- 王玉娇, 2014. 分数阶导数及其应用[D]. 太原: 太原理工大学.
- Bagley R L, Torvik P J, 1983. A theoretical basis for the application of fractional Calculus to viscoelasticity [J]. *J Rheol*, 27(3): 201-210.
- Ding P, Xu R, Zhu Y, et al, 2022. Correction to: Fractional derivative modelling for rheological consolidation of multilayered soil under time-dependent loadings and continuous permeable boundary conditions [J]. *Acta Geotech*, 17(8): 3695.
- Esmaceli R, Farhad S, 2020. Parameters estimation of generalized Maxwell model for SBR and carbon-filled SBR using a direct high-frequency DMA measurement system[J]. *Mech Mater*, 146: 103369.
- Göbel L, Flohr A, Osburg A, et al, 2025. Deciphering the contribution of polymer latexes on the viscoelastic behavior of hardened cement pastes by means of dynamic-mechanical analysis[J]. *Case Stud Constr Mater*, 22: e04460.
- Li X, Shao H, 2024. Investigation of bio-thermo-mechanical responses based on nonlocal elasticity theory and fractional Pennes equation [J]. *Appl Math Model*, 125: 390-401.
- Meng R, Cao L, Zhang Q, 2023. Study on the performance of variable-order fractional viscoelastic models to the order function parameters [J]. *Appl Math Model*, 121: 430-444.
- Pierro E, Carbone G, 2021. A new technique for the characterization of viscoelastic materials: Theory, experiments and comparison with DMA [J]. *J Sound Vib*, 515: 116462.
- Popov V L, Heß M, Willert E, 2019. Viscoelastic materials [M]//*Handbook of Contact Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer: 213-249.
- Rahman G U, Ahmad D, Gómez-Aguilar J F, et al, 2025. Study of Caputo fractional derivative and Riemann-Liouville integral with different orders and its application in multi-term differential equations [J]. *Math Meth Appl Sci*, 48(2): 1464-1502.
- Sun W, Yuan Y X, 2006. Optimization theory and methods [M]. New York: Springer: 71-117.
- Tayyebati M, Sarhadi A, Fraise A, et al, 2025. Effects of high-cycle fatigue on the viscoelastic properties of epoxy resin [J]. *Eur J Mech A*, 112: 105641.
- Vishnukumar K S, Vellappandi M, Govindaraj V, 2024. Reachability of time-varying fractional dynamical systems with Riemann-Liouville fractional derivative [J]. *Fract Calc Appl Anal*, 27(3): 1328-1347.
- Wang Z, Liu Y, Zhang B, et al, 2025. Creep performance and viscoelastic constitutive relationship of structural acrylic connected using bulk polymerization technique [J]. *Buildings*, 15(20): 3691.
- Xiang G, Yin D, Meng R, et al, 2021. Predictive model for stress relaxation behavior of glassy polymers based on variable-order fractional Calculus [J]. *Polym Adv Technol*, 32(2): 703-713.
- Ye L T, Chen Y M, Liu J K, et al, 2026. Fractional gradient-enhanced generalized response sensitivity approach for parameter identification with applications in fractional-order systems [J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 152: 109349.

(责任编辑 王海蓉)